



The Analysis of Super (a,d) - S_3 Antimagic Total Decomposition of Connected in Developing a Ciphertext

Kholifatursyidah^{1,2}, Dafik^{1,3}, Susi Setiawani³

¹CGANT- University of Jember

²Department of Mathematics Education - University of Jember

³Department of Information System - University of Jember

aminatussolehah93@gmail.com; hestiarin@gmail.com; d.dafik@unej.ac.id

Abstract

Covering of G is $H = \{H_1, H_2, H_3, \dots, H_k\}$ subgraph family from G with every edges on G admit on at least one graph H_i for a $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. If every $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, H_i isomorphic with a subgraph H , then H said cover- H of G . Furthermore, if cover- H of G have a properties is every edges G contained on exactly one graph H_i for a $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, then cover- H is called decomposition- H . In this case, G is said to contain decomposition- H . A graph $G(V, E)$ is called (a, d) - H total decomposition if every edges E is sub graph of G isomorphic of H . In this research will be analysis of super (a, d) - S_3 total decomposition of connective helm graph to developing ciphertext.

Key Word : *Super (a, d) - S_3 , Dekomposisi, Graf helm, dan Ciphertext*

Mathematic Subject Clasification: 05C12

Pendahuluan

Teori graf adalah salah satu cabang dari matematika yang pertama kali diperkenalkan oleh seorang matematikawan Swiss yang bernama Leonard Euler pada tahun 1736, sebagai upaya menyelesaikan masalah jembatan Königsberg yang tercatat dalam sejarah untuk pertama kali menggunakan graf. Seiring perkembangan jaman dan teknologi, teori graf banyak dijadikan model dalam memecahkan masalah yang ada di kehidupan [1]. Salah satu masalah yang berkaitan dengan graf yang telah dikaji adalah dekomposisi graf. Pelabelan graf yang akan digunakan dalam penelitian ini, yaitu pelabelan dekomposisi. Hal ini karena jaranganya penelitian graf yang menggunakan pelabelan dekomposisi, belum ada pelabelan dekomposisi yang dikaitkan dengan pengembangan *ciphertext*, serta untuk menambah wawasan baru tentang pelabelan suatu graf.

Selimut dari G adalah $H = \{H_1, H_2, H_3, \dots, H_k\}$ keluarga subgraf dari G dengan sifat setiap sisi di G termuat pada sekurang-kurangnya satu graf H_i untuk suatu $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Jika untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, H_i isomorfik dengan suatu subgraf H , maka H dikatakan selimut- H dari G . Selanjutnya, jika selimut- H dari G memiliki sifat yaitu setiap sisi G termuat dalam tepat satu graf H_i untuk suatu $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, maka selimut- H disebut dekomposisi- H . Dalam hal ini, G dikatakan memuat dekomposisi- H atau G terdekomposisi atas H . [3]

Artikel ini akan menjelaskan tentang dekomposisi dari graf Helm konektif serta pengembangannya dalam pembuatan *ciphertext*. Akan ditentukan kardinal-

itas dan teorema-teorema tentang super antimagic total dekomposisi graf Helm konektif, kemudian pelabelannya akan digunakan untuk pembuatan *ciphertext*. Dari uraian tersebut maka penulis menulis judul artikel "Analisis Super (a, d)-S₃ Antimagic Total Dekomposisi Graf Helm untuk Pengembangan *ciphertext*".

Kardinalitas Graf Helm

Misalkan $H_n = (V(H_n), E(H_n))$ adalah graf berhingga dengan $|V(H_n)| = p_G$ dan $E(H_n) = q_G$. Pelabelan pada H_n didefinisikan sebagai suatu fungsi yang memetakan elemen-elemen H_n ke suatu subhimpunan bilangan bulat positif. Daerah definisi dari fungsi ini dapat berupa himpunan titik, himpunan sisi, atau gabungan himpunan titik. Pelabelan tersebut berturut-turut disebut pelabelan titik, pelabelan sisi, atau pelabelan total. Selanjutnya, jumlah semua label yang berkaitan dengan satu elemen pada suatu graf dikatakan bobot dari elemen tersebut. [6], [7], [8], dan [10]

Berdasarkan uraian diatas, Graf helm adalah graf yang memiliki $V(H_n) = \{P\} \cup \{x_i, y_i, 1 \leq i \leq n\}$, $E(H_n) = \{Px_i, x_i x_{i+1}, x_i y_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_n x_1\}$, $p_G = |V| = 2n + 1$, $q_G = |E| = 3n$, $p_{H_n} = 4$, dan $q_{H_n} = 3$.

Lemma 1 [4] *Jika graf $H_n(V, E)$ adalah super (a, d)-S₃ antimagic total dekomposisi maka*

$$d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - 1}$$

untuk $s = |H_i|$, $p_G = |V|$, $q_G = |E|$, $p_H = |V'|$, $q_H = |E'|$

Bukti.

$$\begin{aligned} (s-1)d &\leq p_H p_G - \frac{p_H-1}{2} p_H + q_H p_G + q_H q_G - \frac{q_H-1}{2} q_H - a \\ (s-1)d &\leq p_H p_G - \frac{p_H-1}{2} p_H + q_H p_G + q_H q_G - \frac{q_H-1}{2} q_H - \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \\ (s-1)d &= p_H p_G - \frac{p_H^2}{2} + \frac{p_H}{2} + q_H q_G - \frac{q_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} - \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \\ (s-1)d &= p_H p_G + q_H q_G - p_H^2 - q_H^2 \\ (s-1)d &= p_H p_G - p_H^2 + q_H q_G - q_H^2 \\ (s-1)d &= (p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H \\ d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s-1} \end{aligned}$$

Jadi, untuk $s = |H_i|$, $p_G = |V|$, $q_G = |E|$, $p_H = |V'|$, $q_H = |E'|$ terbukti bahwa $d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s-1}$

Hasil Penelitian

Dekomposisi

Menurut Inayah (2012), jika selimut- H dari G memiliki sifat yaitu setiap sisi G termuat dalam tepat satu graf H_i untuk semua $i \in 1, 2, \dots, k$, maka selimut- H disebut dekomposisi- H . Dalam hal ini, G dikatakan memuat dekomposisi- H atau G terdekomposisi atas H . Inayah (2012), graf Petersen terdekomposisi atas P_4 , tetapi graf Petersen tidak terdekomposisi atas P_3 karena $E(\text{graf Petersen}) = 15$ dan $|E(P_3)| = 2$.

Metode penelitian yang digunakan yaitu menentukan kardinalitas dari garf Helm, menentukan d untuk dekomposisi dari S_3 , menentukan fungsi titik, fungsi bobot dekomposisi, fungsi sisi, fungsi bobot total dekomposisi, dan pembuatan *ciphertext* untuk suatu pesan rahasia. Berikut akan diuraikan hasil dari penelitian berupa teorema beserta pembuktiannya terkait dekomposisi graf untuk graf Helm dan juga suatu *ciphertext* yang didasari atas teorema tersebut.

◇ **Teorema 1** *Graf helm H_n memiliki super $(13n + 10, 0)$ - S_3 antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 3$.*

Bukti. Labeli titik graf Helm H_n dengan fungsi f_1 yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_1(P) &= 1 \\ f_1(x_1) &= n + 1 \\ f_1(y_1) &= n + 2 \\ f_1(x_i) &= i; \text{ untuk } 2 \leq i \leq n \\ f_1(y_i) &= 2n - i + 3; \text{ untuk } 2 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa f_1 adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan $f_1 : V(H_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, 2n + 1\}$. Misal w_{f_1} adalah bobot sisi super $(13n + 10, 0)$ - S_3 antimagic total dekomposisi graf helm H_n untuk $n \geq 3$, maka dapat diturunkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{f_1} &= f_1(P) + f_1(x_1) + (f_1(x_i)|i = i + 1) + f_1(y_1) \\ &= 1 + (n + 1) + (i + 1) + (n + 2) \\ &= 2n + i + 5; 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Kemudian labeli sisi graf Helm H_n dengan fungsi f_1 yang didefinisikan

sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_1(Px_i) &= 3n - i + 2; 1 \leq i \leq n \\ f_1(x_i x_{i+1}) &= 3n + i + 1; 1 \leq i \leq n \\ f_1(x_n x_1) &= 4n + 1 \\ f_1(x_i y_i) &= 5n - i + 2; 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Misal W_{f_1} adalah bobot total sisi super $(13n + 10, 0)$ -S₃ antimagic total dekomposisi graf helm H_n untuk $n \geq 3$, maka dapat diturunkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_1} &= w_{f_1} + f_1(Px_i) + f_1(x_i x_{i+1}) + f_1(x_i y_i) \\ &= (2n + i + 5) + (3n - i + 2) + (3n + i + 1) + (5n - i + 2) \\ &= 13n + 10; 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Sehingga terbukti bahwa Graf helm H_n memiliki super $(13n + 10, 0)$ -S₃ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 3$.

◇ **Teorema 2** *Graf helm H_n memiliki super $(\frac{25n+21}{2}, 1)$ -S₃ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 3$.*

Bukti. Labeli titik graf Helm H_n dengan fungsi f_2 yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_2(P) &= 1 \\ f_2(x_i) &= \frac{n + i + 2}{2}; \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, i \in \text{ganjil} \\ f_2(x_i) &= \frac{i + 2}{2}; \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, i \in \text{genap} \\ f_2(y_i) &= n + i + 1; 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa f_2 adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan $f_2 : V(H_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, 2n + 1\}$. Misal w_{f_2} adalah bobot sisi super $(\frac{25n+11}{2}, 1)$ -S₃ antimagic total dekomposisi graf helm H_n untuk $n \geq 3$, maka dapat diturunkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{f_2} &= f_2(P) + (f_2(x_i); i \in \text{ganjil}) + (f_2(x_i); i \in \text{genap}) + f_2(y_i) \\ &= 1 + (\frac{n + i + 2}{2}) + (\frac{i + 2}{2}) + (n + i + 1) \\ &= \frac{3n + 4i + 7}{2}; 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Kemudian labeli sisi graf Helm H_n dengan fungsi f_2 yang didefinisikan sebagai

berikut:

$$\begin{aligned}f_2(Px_i) &= 3n - i + 2; 1 \leq i \leq n \\f_2(x_i x_{i+1}) &= 3n + i + 1; 1 \leq i \leq n \\f_2(x_n x_1) &= 4n + 1 \\f_2(x_i y_i) &= 5n - i + 2; 1 \leq i \leq n\end{aligned}$$

Misal W_{f_2} adalah bobot total sisi super $(\frac{25n+11}{2}, 1)$ -S₃ antimagic total dekomposisi graf helm H_n untuk $n \geq 3$, maka dapat diturunkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}W_{f_2} &= w_{f_2} + f_2(Px_i) + f_2(x_i x_{i+1}) + f_2(x_i y_i) \\&= \left(\frac{3n + 4i + 7}{2}\right) + (3n + i + 1) + (3n + i + 1) + (5n - i + 2) \\&= \frac{25n + 6i + 15}{2}; 1 \leq i \leq n\end{aligned}$$

Penurunan rumus W_{f_2} tersebut membentuk himpunan barisan aritmatika yaitu $W_{f_2} = \{\frac{25n+21}{2}, \frac{25n+23}{2}, \dots, U_n\}$. Maka nilai U_n dapat dicari dengan cara $U_n = a + (n - 1)b = \frac{25n+21}{2} + (n - 1).1 = \frac{25n+21}{2} + n - 1 = \frac{27n+19}{2}$. Karena nilai a pada barisan tersebut adalah $\frac{25n+21}{2}$, sehingga terbukti bahwa Graf helm H_n memiliki super $(\frac{25n+21}{2}, 1)$ -S₃ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 3$.

◇ **Teorema 3** *Graf helm H_n memiliki super $(12n + 11, 2)$ -S₃ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 3$.*

Bukti. Labeli titik graf Helm H_n dengan fungsi f_3 yang didefinisikan sebagai berikut: $f_3(P) = f_1(P)$, $f_3(x_1) = f_1(x_1)$, $f_3(y_1) = f_1(y_1)$, $f_3(x_i) = f_1(x_i)$, dan $f_3(y_i) = f_1(y_i)$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa f_3 adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan $f_3 : V(H_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, 2n + 1\}$. Misal w_{f_3} adalah bobot sisi super $(12n + 11, 2)$ -S₃ antimagic total dekomposisi graf helm H_n untuk $n \geq 3$, maka $w_{f_3} = w_{f_1}$.

Kemudian labeli sisi graf Helm H_n dengan fungsi f_3 yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}f_3(Px_i) &= 2n + i + 1; 1 \leq i \leq n \\f_3(x_n x_1) &= 3n + 2 \\f_3(x_i x_{i+1}) &= 4n - i + 2; 1 \leq i \leq n \\f_3(x_i y_i) &= 4n + i + 1; 1 \leq i \leq n\end{aligned}$$

Misal W_{f_3} adalah bobot total sisi super $(12n + 11, 2)$ -S₃ antimagic total

dekomposisi graf helm H_n untuk $n \geq 3$, maka dapat diturunkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_3} &= w_{f_3} + f_3(Px_i) + f_3(x_i x_{i+1}) + f_3(x_i y_i) \\ &= (2n + i + 5) + (2n + i + 1) + (4n - i + 2) + (4n + i + 1) \\ &= 12n + 2i + 9; 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Penurunan rumus W_{f_3} tersebut membentuk himpunan barisan aritmatika yaitu $W_{f_3} = \{12n + 11, 12n + 13, \dots, U_n\}$. Maka nilai U_n dapat dicari dengan cara $U_n = a + (n - 1)b = 12n + 11 + (n - 1).2 = 12n + 11 + 2n - 2 = 14n + 9$. Karena nilai a pada barisan tersebut adalah $12n + 11$, sehingga terbukti bahwa Graf helm H_n memiliki super $(12n + 11, 2)$ -S₃ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 3$.

Aplikasi

Tingkat kriminalitas pengacakan kode yang semakin meningkat membuat para pemilik pesan rahasia harus lebih waspada. Permasalahan ini adalah termasuk bagian aplikasi total dekomposisi dalam *cryptography*. *Cryptography* adalah sebuah teknik merubah dari *plaintext* (kalimat pesan) ke dalam ciphertext (kalimat rahasia yang akan dikembangkan)[13]. Ciphertext merupakan bentuk pesan yang tersandi ke bentuk lain yang tidak dapat dipahami [12]. Misalnya pesan rahasia yang akan dikirim adalah "20127 adalah PIN kartu kredit anda". Pelabelan yang digunakan untuk mengubah pesan tersebut yaitu pelabelan total dekomposisi pada graf Helm H_9 dengan $d = 0$ (sesuai teorema 1).

Label titik dan label sisi menggunakan angka 1 sampai 46. Sebelum meletakkan huruf pada diagram pohon, pengeliminasian cabang perlu dilakukan agar tidak ada kode yang berulang. Tahap awal untuk mengeliminasi cabang yaitu dengan menjumlahkan titik graf Helm H_n dengan jumlah keseluruhan huruf alfabet. Jumlah titik yang digunakan pada graf Helm H_9 adalah 19 titik jumlah alfabet adalah 26, dan 1 spasi ($\sqcup$), maka penjumlahan ketiganya diperoleh 46. Label sisi atau cabang yang harus di eliminasi yaitu label sisi yang lebih besar dari jumlah titik graf Helm dengan jumlah alfabet. Langkah selanjutnya adalah membuat digram pohon yang berakar di label 1 dengan dilengkapi label sisinya

Langkah selanjutnya yaitu memasang semua alfabet yaitu dari a sampai z dan spasi ($\sqcup$) pada setiap cabang diagram pohon. Penempatan alfabet ini harus berurutan dari kiri ke kanan dan dimulai dari layer pertama, penempatan spasi setelah huruf z. Setelah penempatan alfabet dan spasi ($\sqcup$) dilakukan, selanjutnya adalah menghitung nilai modulo dari setiap cabang atau label sisi sesuai dengan letak alfabet dan spasi ($\sqcup$). Pesan rahasia dipecahkan

dengan menerapkan teknik kriptosistem modulo 27 terhadap masing-masing huruf alfabet sehingga menjadi $a = \text{mod}(23, 27) = 23$, $b = \text{mod}(29, 27) = 2$, $c = \text{mod}(35, 27) = 8$, $d = \text{mod}(41, 27) = 14$, $e = \text{mod}(20, 27) = 19$, $f = \text{mod}(26, 27) = \sqcup$, $g = \text{mod}(32, 27) = 5$, $h = \text{mod}(38, 27) = 11$, $i = \text{mod}(44, 27) = 17$, $j = \text{mod}(21, 27) = 21$, $k = \text{mod}(24, 27) = 24$, $l = \text{mod}(25, 27) = 25$, $m = \text{mod}(27, 27) = 0$, $n = \text{mod}(30, 27) = 3$, $o = \text{mod}(31, 27) = 4$, $p = \text{mod}(33, 27) = 6$, $q = \text{mod}(36, 27) = 9$, $r = \text{mod}(37, 27) = 10$, $s = \text{mod}(39, 27) = 12$, $t = \text{mod}(42, 27) = 15$, $u = \text{mod}(43, 27) = 16$, $v = \text{mod}(45, 27) = 18$, $w = \text{mod}(22, 27) = 22$, $x = \text{mod}(28, 27) = 1$, $y = \text{mod}(34, 27) = 7$, $z = \text{mod}(40, 27) = 13$, dan $\sqcup = t$.

Maka diperoleh *ciphertext* dari semua alfabet yaitu $a = x, b = c, c = i, d = o, e = u, f = \sqcup, g = f, h = l, i = r, j = v, k = y, l = z, m = a, n = d, o = e, p = g, q = j, r = k, s = m, t = p, u = q, v = s, w = w, x = b, y = h, z = n, \sqcup = t$. Oleh karena itu, dengan menggunakan proses substitusi pesan ke dalam *ciphertext* dengan menggunakan spasi ($\sqcup$) dan tanpa tanda baca, maka *ciphertext* dari pesan "dua nol satu dua tujuh adalah pin kartu kredit anda" adalah "oqxtdeztm xpqtoqxt pqvqltxoxzxl tgrdtyxkpqtkkuorptxdox".

Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian diatas, maka kita dapat menyimpulkan bahwa:

- Graf helm H_n memiliki super $(13n + 10, 0)$ - S_3 antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 3$.
- Graf helm H_n memiliki super $(\frac{25n+21}{2}, 1)$ - S_3 antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 3$.
- Graf helm H_n memiliki super $(12n + 11, 2)$ - S_3 antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 3$.
- *ciphertext* dari pesan "dua nol satu dua tujuh adalah pin kartu kredit anda" adalah "oqxtdeztm xpqtoqxt pqvqltxoxzxl tgrdtyxkpqtkkuorptxdox".

Referensi

- [1] Nur Rahmawati, Dekomposisi graf sikel, graf roda, graf gir dan graf persahabatan, Skripsi, Not Publicated, Universitas Negeri Surabaya, 2014.
- [2] Erni Novianti, Dekomposisi Cyclic dari Graf Lengkap, Graf Graceful, dan Aplikasinya dalam Telecommand Codes, Artikel, 2012.

- [3] A.E. Hader,A. N. M Salman, An A_M -Supermagic Decomposition Of The Cartesian Product Of a Path and Sun, Artikel, 2013
- [4] Dafik, Structural Properties and Labeling of Graphs, University of Ballarat, 2007.
- [5] M. Baca, Y. Lin, M. Miller and M.Z. Youssef, Edge-antimagic graphs, Discrete Math, 2007.
- [6] Nur Inayah, Pelabelan $(a, d) - H$ -Anti Ajaib Pada Beberapa Kelas Graf, Disertasi, Not Publicated, Institut Teknologi Bandung, 2013.
- [7] W.D. Wallis, E.T. Baskoro, M. Miller and Slamin, Edge-magic total labelings, Austral. J. Combin., 2000.
- [8] Joseph A. Gallian, A Dynamic Survey of Graph Labeling, University of Minnesota, 1997.
- [9] Reni U., Pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf UFO, Thesis, Not Publicated, University of Jember, 2013.
- [10] Dafik, M. Miller, J.Ryan and M.Baca, On super (a,d) -edge antimagic total labeling of disconnected graphs, Discrete Math, (To appear).
- [11] Ira A., Pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan saling lepas graf tangga, Thesis, Not Publicated, University of jember, 2011.
- [12] Ongko, Erianto. 2013. *Aplikasi Pembelajaran Kriptografi Klasik dengan Visual Basic .NET*. Medan: STMIK IBBI.
- [13] Pearson, E. 2006. *Introduction To Cryptography With Coding Theory*. America: United States of America
- [14] Dafik, Slamin, R. Fitriana Eka, and Sya'diyah Laelatus. Super antimagicness of triangular book and diamond ladder graphs. 2013.
- [15] Baca, M., Dafik, Miller, M., and Ryan, J. Antimagic labeling of disjoint union of s-crowns. Utilitas Mathematica, 2009, 79: 193-205.